

Приложение

Комплексни числа

За да въведем и изброим основните свойства на комплексните числа, ще разгледаме квадратното уравнение

$$az^2 + bz + c = 0,$$

където a, b, c са реални числа. Решенията на уравнението са

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Когато дискриминантата $D = b^2 - 4ac < 0$, не съществува реално число, което да удовлетворява уравнението. За да има уравнението решение и в този случай, е необходимо разширение на понятието число, което е свързано с въвеждането на така наречената *имагинерна единица* с условието

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1, \quad i^3 = i \cdot i^2 = -i, \quad i^4 = i \cdot i^3 = -i^2 = 1.$$

Тогава решенията се записват във вида

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Число от вида $z = x + iy$ се нарича комплексно число, където числата x и y са реални. Те се наричат съответно *реална* и *имагинерна* част на комплексното число и се означават като $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Ако $\operatorname{Im} z = 0$, числото $z = x$ е реално, а ако $\operatorname{Re} z = 0$, числото $z = iy$ е имагинерно.

Комплексното число е равно на нула само в случая, че реалната и имагинерната му части са равни на нула, т. е.

$$z = 0 = 0 + i0 \rightarrow x = \operatorname{Re} z = 0, \quad y = \operatorname{Im} z = 0.$$

В общия случай две комплексни числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ са равни, само когато

$$z_1 = z_2 \rightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Действията събиране, изваждане и умножение се извършват почленно, както при действие с реални числа с отчитане на свойствата на имагинерната единица. Така имаме

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

като е използвано, че $i^2 = -1$.

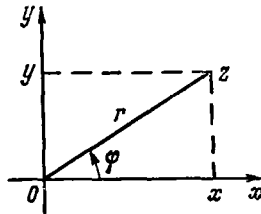
На всяко комплексно число $z = x + iy$ може да се съпостави комплексно спрегнатото му $z^* = x - iy$, при което всяко реално число удовлетворява условието $z = z^* (y = 0)$, а $z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2$ е също реално. Полезни са следните свойства на всяко комплексно число

$$(1) \quad z + z^* = 2x, \quad z - z^* = 2iy, \quad x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

Тогава деленето на две комплексни числа се задава с правилото

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На комплексните числа може да се даде геометрична интерпретация. Всяко реално число се задава с точка от ориентирана права. Тъй като всяко комплексно число се определя от две независими реални числа x и y , те могат да се разглеждат като правоъгълни координати на точка в равнината (фиг. 1). Представянето $z = x + iy$ се нарича *алгебричен вид* на комплексното число. Ако изразим декартовите координати



Фиг. 1.

(x, y) чрез полярните координати (r, φ) , имаме

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

След като заместим в $z = x + iy$, комплексното число придобива вида

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Полученото представяне е известно като *тригонометричен вид* на комплексното число, като могат да се изведат конкретни правила за действия с (r, φ) при извършване на алгебрични действия. Правилата силно могат да се упростят, като установим поведението на функцията на реална променлива

$$f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

чиито стойности са комплексни числа. Като диференцираме $f(\varphi)$, получаваме

$$f'(\varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i^2 \sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = if(\varphi).$$

Тъй като единствената функция, за която $f'(\varphi) \sim f(\varphi)$, е

$$f(\varphi) = e^{\alpha \varphi} \rightarrow f'(\varphi) = \alpha e^{\alpha \varphi},$$

намираме формулата

$$f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

установена от Леонард Ойлер и наречена в негова чест *формула на Ойлер*. Представянето $z = re^{i\varphi}$ се нарича *експоненциален вид* на комплексното число. Като използваме свойствата на експонентата, получаваме

$$(e^{i\varphi})^* = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Тогава от (1), следва

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}),$$

$$\cos(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = \operatorname{ch} \varphi, \quad \sin(i\varphi) = -\frac{1}{2i}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}) = i \operatorname{sh} \varphi,$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Полезни допълнителни свойства на комплексните числа и други математически сведения можете да намерите в

K. Weltner et al., Mathematics for Engineers and Scientists, Springer-Dordrecht-Heidelberg-London-New York, 2009.

Klaus. Hefft, Mathematical Preparation Course Before Studying Physics, University of Heidelberg, 2013.